

**COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS DE OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS:
MARKOWITZ VS. BLACK-LITTERMAN, PARA ACTIVOS FINANCIEROS
COLOMBIANOS**

Juan Miguel Montoya

jmonto76@eafit.edu.co

Carolina Maya

cmayaba@eafit.edu.co

Asesor de tesis: Paula Maria Almonacid Hurtado

PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
ADMINISTRACIÓN FINANCIERA

**ESCUELA DE ECONOMÍA Y FINANZAS
MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN FINANCIERA
UNIVERSIDAD EAFIT
MEDELLÍN
2016**

RESUMEN

Personas naturales y compañías financieras que manejan grandes volúmenes de capital, especialmente fondos de pensiones y aseguradoras, deben tener muy claro tanto el nivel de exposición al riesgo como la rentabilidad esperada de las carteras de activos financieros que conforman para cada uno de sus clientes desde antes de que estos inviertan. El presente trabajo busca contribuir en este sentido presentando las diferencias y las principales ventajas y desventajas de utilizar los métodos Markowitz y Black-Litterman, para optimizar carteras con activos del mercado de capital colombiano. Dicha comparación se lleva a cabo mediante el cálculo de la frontera eficiente para cada uno de los métodos. Los resultados muestran que el método Black-Litterman se ajusta más a las necesidades de diversificación de un inversionista que transa con activos colombianos.

Palabras clave: método de optimización Markowitz, método de optimización Black-Litterman, frontera eficiente, activos financieros colombianos

1. INTRODUCCIÓN

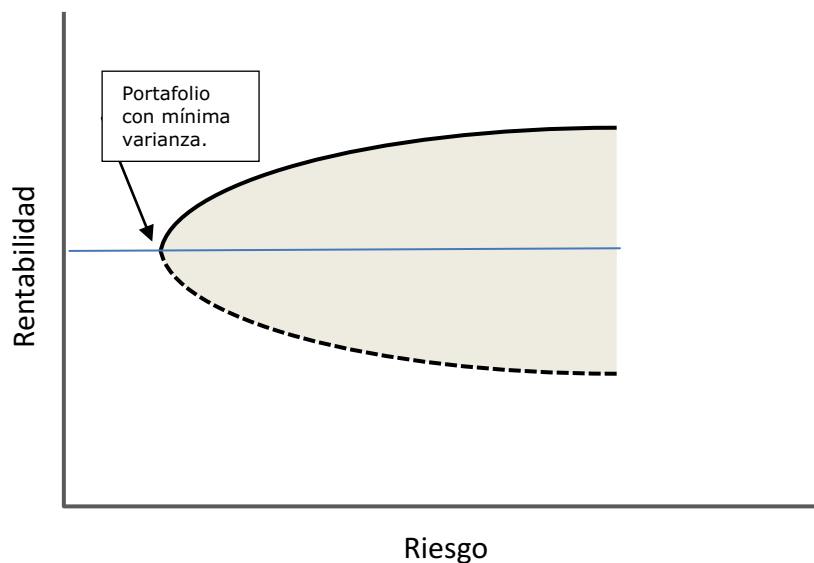
La investigación en optimización de portafolios ha tenido un gran avance, en Colombia y en el mundo, desde que Markowitz (1952) publicó su primer trabajo. De hecho, si se consulta cuántas veces ha sido citado este investigador, se encuentran más de 25.000 artículos. Dicha cifra podría dar cuenta de su relevancia e impacto en la investigación en optimización de portafolios en las últimas décadas. De igual forma, Black y Litterman (1992) marcaron otro gran hito en el área de estudio de los mercados de capitales, al introducir en el método de optimización las perspectivas de expertos, las cuales predicen según el criterio de expertos el comportamiento de los precios de los activos en el tiempo.

En el caso del sector financiero colombiano, la optimización de portafolios es una práctica del día a día; por su impacto en las finanzas de los fondos de pensiones, de las aseguradoras y de otras entidades financieras y personas naturales, se considera necesario analizar la composición de carteras bajo los métodos Black-Litterman y Markowitz tomando como insumo activos financieros colombianos. Por esta razón, en el presente trabajo se establece como objetivo principal evaluar las ventajas y desventajas que presentan los dos métodos de optimización de carteras más reconocidos en la literatura, teniendo en cuenta las características propias de los activos financieros de renta variable del mercado de capitales colombiano.

Para llevar a cabo dicho objetivo, se procederá partiendo de dos variables: el riesgo y la rentabilidad esperada. El riesgo puede medirse como la desviación estándar del portafolio, y es mitigado por la correlación entre los diferentes activos, y la rentabilidad es el retorno esperado de cada uno de los activos combinados en un portafolio. Así mismo, para la optimización de los portafolios se utilizará la correlación entre los activos (matriz de varianzas y covarianzas) y la rentabilidad esperada (retornos).

Considerando que para la optimización de portafolios se puede recurrir a criterios como: la función de utilidad del agente, el Ratio de Sharpe, minimizar el riesgo o maximizar la rentabilidad, entre otros, siempre es posible establecer una frontera eficiente, que indica, por nivel de riesgo, nivel de rentabilidad óptima. Como observa en el gráfico 1,¹ si bien el área sombreada representa los diferentes portafolios que se pueden combinar después de una estimación con un nivel de riesgo y uno de rentabilidad, los únicos portafolios eficientes son los que están en la línea negra, ya que cualquiera que esté en el área sombreada va a tener: o una mayor rentabilidad con el mismo riesgo, o un menor riesgo con la misma rentabilidad. Por tanto, la línea de eficiencia siempre podrá ser calculada, sin importar el criterio elegido para establecer un portafolio óptimo. Para hallar la frontera eficiente, se establece un rango de rentabilidades, que van desde la del activo con más rentabilidad, hasta el portafolio con mínima varianza, el cual debería ser el de menor rentabilidad. Una vez se tenga el rango, se crean entre 15 y 20 intervalos, en cada uno de los cuales se fija la rentabilidad cambiando los pesos de los activos y minimizando el nivel de riesgo, para hallar el portafolio óptimo para ese nivel de rentabilidad. Una vez se tenga la estimación de los portafolios para todos los niveles de rentabilidad, se construye la frontera eficiente combinando riesgo y rentabilidad.

Gráfico 1. Relación rentabilidad-riesgo para las diferentes opciones de portafolios



¹ Todas las tablas y gráficos del presente trabajo fueron elaborados por los autores.

La principal crítica que se le hacen al proceso de optimización tradicional de portafolios es que los retornos están basados en datos históricos de rentabilidad y que la correlación está calculada bajo datos históricos. Al calcular los retornos con datos históricos se distorsiona el cálculo, debido a eventos tales y como las crisis, las situaciones infortunadas para las empresas y los ciclos económicos, entre otros. Por esta misma razón, se considera que el cálculo basado en datos históricos no es el más apropiado para predecir el futuro, así que en la presente investigación se pretende estudiar la conformación de carteras de activos colombianos utilizando los métodos de optimización mencionados.

La estructura del presente trabajo presenta la siguiente forma: en la primera sección, se lleva a cabo la revisión de literatura; en la segunda sección, se expone el marco de referencia; en la tercera sección, se estima la frontera eficiente por los métodos de Markowitz y Black-Litterman y se analizan los resultados; y en la cuarta sección, se desarrollan las conclusiones.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

Markowitz (1952) es quien hace la primera demostración de la importancia de la diversificación en la composición de portafolios. De esta propuesta surgió el dicho popular: “La diversificación es el único almuerzo gratis”, debido a que este investigador demostró que por medio del cálculo de la correlación entre los activos de un portafolio se podía disminuir significativamente el riesgo, y que, tomando los rendimientos históricos de los activos y la correlación entre ellos, se podía estimar el portafolio óptimo para la inversión.

Once años después, Sharpe (1963) hace una mejora en uno de los aspectos del modelo propuesto por Markowitz, y es en la forma de analizar los estimados para determinar la frontera eficiente. La forma de agregarle valor a la optimización de portafolios es por medio del modelo llamado “The diagonal Model” (Sharpe, 1963), que contiene mejoras como su fácil construcción. En conclusión, se dice que los resultados del modelo son muy

fragmentados para ser considerados concluyentes, pero que sí puede representar la relación entre los activos de una manera eficiente.

Uno de los aspectos más criticados del modelo de Markowitz es el problema de las soluciones de esquina y la estimación de los retornos. A la hora de estimar los retornos de los activos por la metodología Markowitz, se parte de que los retornos del futuro estarían explicados por el desempeño del activo en un período determinado de tiempo pasado, y eso es precisamente lo que contradicen Black y Litterman (1992). Uno de los aportes más importantes del modelo Black-Litterman es el método para el cálculo de los retornos, al lograr demostrar basado en el teorema de Bayes que los retornos se pueden expresar como la multiplicación entre la aversión al riesgo, el vector de capitalización de mercado y la matriz de varianzas y covarianzas. Al estimar de esta forma, se evitan los problemas de soluciones de esquina y los retornos negativos, ya que los retornos están basados en una distribución estadística, ajustada por la capitalización de mercado y la matriz de varianzas y covarianzas, y no únicamente por el desempeño de los activos en el pasado. Adicionalmente, en el modelo se incorporó el criterio de experto y la aversión al riesgo del agente.

Después de la publicación de Black-Litterman, muchos autores han hecho mejoras y diferentes propuestas alrededor de esta metodología. Entre ellos se incluyen Bade, Frahm y Jaekel (2009), que muestran una forma de estimar portafolios con metodología bayesiana. Sus parámetros para la estimación están basados en un algoritmo conocido como “parallel tempering”. Para el cálculo de los retornos, utilizan retornos discretos y no log-retornos. A diferencia de otras estimaciones para aproximar la distribución de los retornos, se utilizó el teorema del límite central, de Godin. Para evitar los errores, se utilizaron herramientas estadísticas bayesianas que permitían incluir información en el modelo, tal y como el criterio de experto. Adicionalmente, la matriz de varianzas y covarianzas se modela con un enfoque jerárquico.

Franco-Arbeláez, Avendaño-Rúa y Barbutín-Díaz (2011) hacen una comparación del modelo Markowitz y el modelo Black-Litterman, mostrando las ventajas y desventajas de

cada uno de ellos. Adicionalmente, hacen un recorrido por las extensiones que tiene el modelo Black-Litterman; por ejemplo, utilizar una distribución diferente a la normal para la estimación o plantear el riesgo de manera diferente, entre otras. En conclusión, se dice que la estimación Markowitz ha dado muy buenos resultados, pero siempre y cuando se haga una buena estimación de los retornos. Debido a ello, mencionan que la estimación a partir de datos históricos es muy sesgada.

Nikbakht (2011), al igual que Franco, Avedaño y Barbutín, hace una comparación entre las ventajas y desventajas de utilizar el modelo Black-Litterman y las del modelo de Markowitz (1952), Optimización por media-varianza (MVO, por sus siglas en inglés). Una de las cosas que se resaltan como beneficio son las *views*, o criterios de experto, las cuales ajustan la estimación de los retornos e incluyen el criterio de experto para la estimación. Como crítica a Black-Litterman, se expone que la ausencia de información puede ser un problema para la estimación, ya que por medio del MVO únicamente se necesita la serie histórica de precios de los activos financieros, con los cuales se saca la matriz de varianzas y covarianzas y, adicionalmente, los retornos esperados. Para la estimación por medio del modelo Black-Litterman, se necesitan los precios históricos, la aversión al riesgo, la tasa libre de riesgo, la capitalización de mercado y, adicionalmente, los criterios de experto, entre otros. Por esta razón, el Black-Litterman requiere de datos más precisos para hacer una adecuada estimación.

El valor agregado que muestra Bernal (2013) en su estudio se refiere a los beneficios que tiene utilizar el modelo Black-Litterman frente al modelo tradicional Markowitz, con la diferencia de que en ese caso se utilizaron activos reales, tales y como: activos de deuda soberana, acciones colombianas, renta variable, notas estructuradas, renta fija y efectivo, entre otros. Al hacer la estimación, se llega a la conclusión de que el modelo Black-Litterman tiene un resultado más ajustado, ya que Bernal compara los resultados de cada uno para ver cuál se ajusta más a la realidad y cuál genera más utilidad para el inversionista. Sus resultados llevan a concluir que, en términos de ratio de Sharpe, Treynor, Alfa Jensen, y de acuerdo con una función de utilidad dada por el Bernal, el modelo Black-

Litterman es superior al modelo media varianza (Markowitz), ya que en su ejercicio se logró una mayor utilidad.

Jacobs, Müller & Weber (2014), a diferencia de los otros autores, enfoca su investigación en la diversificación, y establece que es una manera, gratuita en teoría, de disminuir el riesgo, estiman desde las formas más complejas para optimizar portafolios, hasta escoger un portafolio de manera arbitraria. Los modelos que se estudian de selección de portafolios incluyen *commodities* renta variable internacional, entre otros activos financieros. Para la estimación, utilizan once diferentes metodologías de estimación, y se concluye que los beneficios de diversificar están muy inclinados a tener activos de diferentes clases, o tipos. También se concluye que no se encuentra una diferencia significativa en los diferentes métodos de estimación.

Kolm, Tütüncü & Fabozzi (2014) hacen un recorrido a través de 60 historias de optimización de portafolios, que parte de la publicación inicial que presenta Markowitz “Portfolio Selection” y que pasa por la evolución que ha tenido el modelo de media varianza, tales y como la inclusión de los costos de transacción y el cambio en condiciones de mercado, entre otros. Uno de los aspectos en los que Kolm, Tütüncü y Fabozzi hacen énfasis es en la inclusión de técnicas bayesianas y en el modelo Black-Litterman, y hay avances tanto en la estimación de los retornos esperados como en la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas. Uno de los motivos más importantes para el desarrollo de estas nuevas teorías era el de tener una estimación que fuera menos sensible a los cambios en la información. Adicionalmente, se presentan diferentes técnicas de portafolio, que están asociadas más hacia el riesgo, entre otras.

Ramírez y Jaramillo (2015) le aplican la teoría de Black-Litterman (1992) al mercado de renta variable colombiano, para lo cual extraen los datos y estiman el portafolio óptimo establecido por Black-Litterman, para después compararlo con la metodología tradicional MVO. Ramírez y Jaramillo encuentran que los sesgos que quedan al estimar por MVO, en comparación con el modelo de Black-Litterman, muestran los resultados obtenidos, y sacan la conclusión de que tiene mejor desempeño, debido a que dicho modelo es más ajustado a

la realidad, al considerar los retornos de los activos como una distribución estadística, y no los rendimientos pasados. Finalmente, Ramírez y Jaramillo hacen la aclaración de que el modelo de Black-Litterman únicamente funciona mejor que el modelo MVO si se toman los datos correctos y certeros (tales y como *views* y capitalización de mercado, entre otros).

3. MARCO DE REFERENCIA

Teniendo en cuenta que el presente trabajo pretende comparar dos métodos de optimización de cartera, a continuación se presenta la fundamentación teórica de cada método: el de Markowitz y el de Black-Litterman. En el primer caso, se muestra por primera vez el porqué de la diversificación de los portafolios y la importancia de la correlación entre los activos dentro de él. Se muestra que los portafolios tenían una manera simple de reducir el riesgo, y era a través de la diversificación. El enfoque Markowitz parte de que la rentabilidad esperada de cada uno de los activos está dada por el promedio de los retornos y del retorno del portafolio, dado por:

$$E(r)p = w_1E(r)_1 + w_2E(r)_2 + \dots + w_nE(r)_n$$

donde:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

siendo W el porcentaje de participación de cada activo, y E (r), el retorno individual de cada uno de los activos. El riesgo del portafolio, según Markowitz, se expresa con la siguiente ecuación:

$$\sigma_p = \text{Var}_1 w_1^2 + \text{Var}_2 w_2^2 + \dots + \text{Var}(n) w_n^2 + \\ 2\text{Cov}(1,2)w_1w_2 + 2\text{cov}(1,3)w_1w_3 + \dots + \text{Cov}(n,m)w(n)w(m)$$

donde:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

siendo W la participación de cada uno de los activos.

Utilizando ambas ecuaciones, se puede estimar una frontera eficiente, que establece que: si hay un portafolio A con mayor rentabilidad y el mismo riesgo que B, B no sería eficiente. Igualmente, que si hay un portafolio C con menor riesgo y la misma rentabilidad que D, D sería un portafolio ineficiente. A partir de la frontera eficiente, se establece el portafolio óptimo dependiendo de la función de utilidad o de las preferencias del agente.

Para la estimación del segundo modelo por comparar, se toma como referencia la metodología expuesta por Black-Litterman (1992), donde se utilizan diferentes métodos para encontrar la frontera eficiente de portafolios, se eliminan los problemas de soluciones de esquina o portafolios con un único activo y se hace un cálculo más realista de los retornos de los activos. La estimación de Black-Litterman demuestra con estadística bayesiana que la siguiente ecuación arroja los excesos de retorno de cada uno de los activos:

$$\pi = \delta W_{mk} \Sigma$$

donde δ es la aversión al riesgo del inversionista; W_{mk} , el vector de capitalización de mercado de cada uno de los activos en el portafolio; Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de los diferentes activos; y, finalmente, π el vector de exceso de retorno de cada uno de los activos sobre la tasa libre de riesgo. Por lo tanto, los retornos esperados serían la suma de la tasa libre de riesgo y el vector π .

Para el cálculo del riesgo del portafolio se tiene:

$$\sigma_p = \sqrt{W \Sigma W'}$$

donde W es el vector de participación de los activos en el portafolio y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas.

Adicional a la estimación regular establecida por Black-Litterman, en el modelo se pueden incluir los criterios de experto o *views*, los cuales incluyen en el modelo la proyección de analistas o expertos. Una vez se tengan los *views* de los activos en porcentaje, se debe recalcular la matriz de varianzas y covarianzas Σ y, por ende, los retornos.

Para la nueva matriz de varianzas y covarianzas, se tiene:

$$\Sigma_{bl} = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

donde τ es $1/(\text{número de observaciones de retornos})$; P es una matriz diagonal de unos (solo en caso de que se tengan *views* absolutas de todos los activos); y Ω es una matriz diagonal, que multiplica en cada valor el vector de la matriz P correspondiente, por la matriz de varianzas y covarianzas, por la traspuesta el vector correspondiente de la matriz P y, finalmente, por τ .

Finalmente, para los retornos se establece la siguiente ecuación:

$$\mu_{bl} = \pi + \tau\Sigma_{bl}P'[P\tau\Sigma_{bl}P' + \Omega]^{-1}[Q - P\pi]$$

donde Q es el vector de los *views* en porcentaje, de cada uno de los activos, y Σ_{bl} es la nueva matriz de varianzas y covarianzas.

Una vez se tiene la nueva matriz y el riesgo, se pasa a estimar los portafolios posibles minimizando el riesgo y hallando la rentabilidad para calcular la frontera eficiente establecida por Black-Litterman.

4. MÉTODO DE SOLUCIÓN

En esta sección se hizo la comparación del método Black-Litterman y de Markowitz, para la optimización de portafolios con activos de renta variable pertenecientes a COLCAP, donde se estima la frontera eficiente para ambos métodos, y posteriormente se hace una comparación de diferentes portafolios óptimos calculados con diferentes criterios, tales y como: rentabilidad fija, riesgo fijo y ratio de Sharpe.

Datos para ambos modelos

En primer lugar, como información se tomaron los precios de diferentes activos de renta fija y de renta variable del mercado colombiano. En el mercado de renta variable, se tomaron las acciones que hacen parte del índice colombiano COLCAP, ya que son las más representativas del mercado colombiano, así como aquellas de mayor liquidez. Del mercado de renta fija, se tomó un bono soberano, con vencimiento a 10 años. Los datos fueron extraídos de la plataforma Bloomberg, y para mayor facilidad en el manejo de los datos se trabajó con el rendimiento de forma semanal y continua. Con el fin poner en práctica el método Black-Litterman, se obtuvo la capitalización bursátil de cada una de las acciones, y para el bono se obtuvo el número de bonos en circulación de ese mismo tipo,

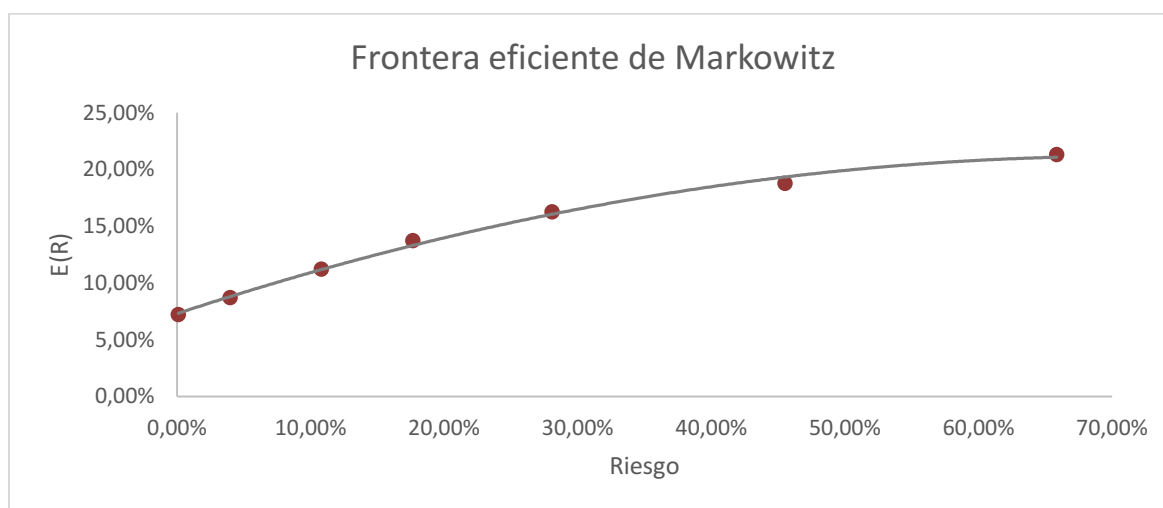
Estimación por el modelo Markowitz

Para la estimación del modelo Markowitz, se calculó la matriz de varianzas y covarianzas de todos los activos, tanto de la renta variable como del bono. Una vez obtenida la matriz de varianzas y covarianzas, se calculó el retorno de cada uno de los activos, que está dado por el promedio de los retornos semanales, y a continuación se anualizaron, para observar la rentabilidad efectiva anual. Posteriormente, se calculó la desviación estándar de cada uno de los activos individuales.

Anualizando la desviación estándar del portafolio para trabajar en los mismos términos, se calculó con pesos iguales para todos los activos. A continuación, para construir la frontera eficiente, se toma el retorno esperado del bono (5%) y el mayor retorno (21%), para saber en qué rango de retornos estará el portafolio eficiente (ver anexo 1: Valores de la frontera eficiente).

Una vez obtenido el modelo, se pasó a estimar la frontera eficiente, estableciendo como objetivo la rentabilidad (que va desde 5 hasta 21), con incrementos lineales de 2,5% y minimizando el riesgo. Una vez se estimó la frontera eficiente, se obtuvieron los resultados que se muestran a continuación, en el gráfico 2.

Gráfico 2. Resultados de la estimación de la frontera eficiente



Adicionalmente, se calculó el portafolio de mínima varianza, el cual tiene un riesgo de 0,10% con una rentabilidad de 7,20%.

Estimación por Black-Litterman

Para la estimación por Black-Litterman se utilizan los mismos datos que para la estimación por Markowitz, e igualmente se trabajan con periodicidad semanal. Las *views* fueron extraídos de Bloomberg, donde se hace un promedio de las diferentes calificadoras y se

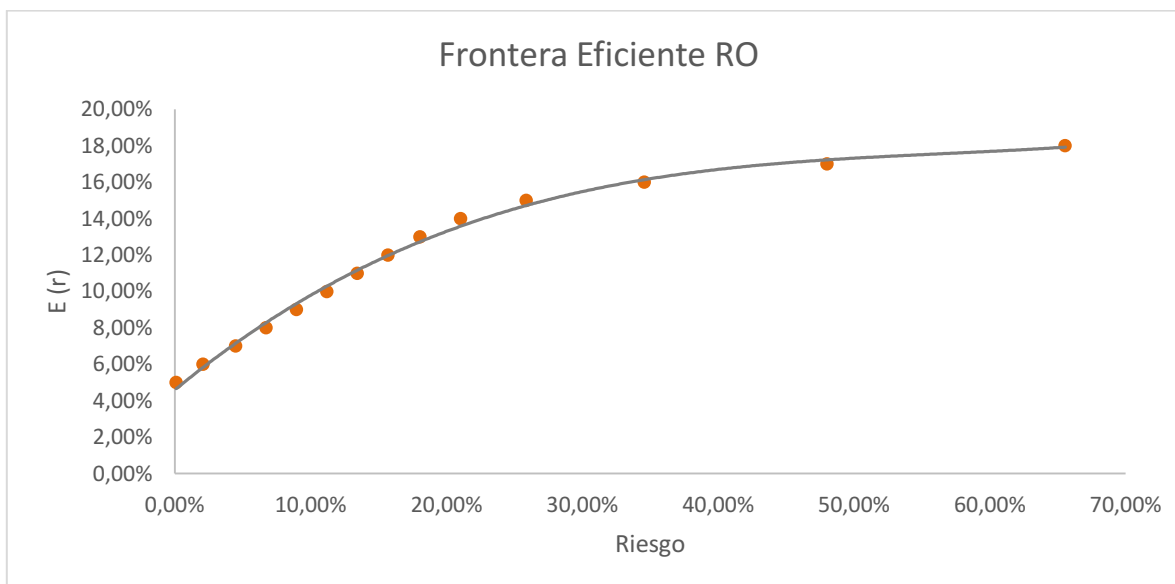
establece un precio objetivo. A partir del precio actual, se establece la predicción y el crecimiento efectivo anual (ver anexo 2: *views* y capitalización de mercado).

Utilizando la misma matriz de varianzas y covarianzas calculada por la metodología Markowitz, se establecieron los retornos por Black-Litterman sin *views*, los cuales se llamarán RO (*Reverse Optimization*, por sus siglas en inglés).

Con el fin de tener la comparación lo más homogénea posible, la aversión al riesgo se estableció como una constante con el valor de 3. La aversión al riesgo 3 representa la aversión al riesgo de un agente promedio o moderado. Debido a que los retornos calculados son excesos de retornos, se debe trabajar con una tasa libre de riesgo. La tasa libre de riesgo para este ejercicio se estableció con un valor de 5% considerando los bonos del Tesoro colombiano a largo plazo. Una vez calculados los retornos RO, se calcula el riesgo de todo el portafolio.

Con el nivel de riesgo, que depende de la participación W de los activos, se calculó la frontera eficiente para Black Litterman RO, estimando el retorno esperado fijo como objetivo, minimizando el riesgo y cambiando los porcentajes. Este mismo procedimiento se repitió catorce veces cambiando la rentabilidad objetivo. Según se observa en el gráfico 3 (ver anexo 3: Valores de la frontera eficiente).

Gráfico 3. Frontera eficiente para estimación por Black-Litterman RO

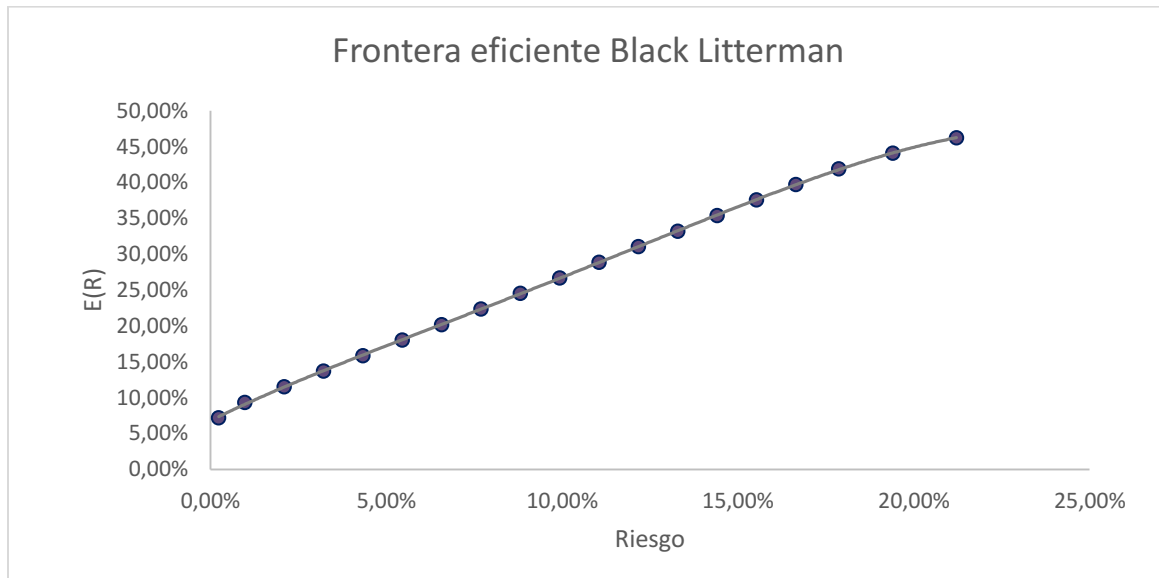


Para el cálculo del modelo Black-Litterman, se incorporan las *views* y se establece una nueva matriz de varianzas y covarianzas.

Una vez se obtiene la nueva matriz de varianzas y covarianzas, se procede a estimar los nuevos retornos de Black-Litterman, conservando la misma tasa libre de riesgo. Con los retornos obtenidos, se estima el nivel de riesgo del portafolio.

Debido a que el nivel de riesgo y rentabilidad dependen de la participación W de los activos se calculó la frontera eficiente para Black Litterman, estimando el retorno esperado fijo como objetivo minimizando el riesgo y cambiando los porcentajes. El procedimiento se repitió 19 veces incrementando el valor esperado en 2,1%, tal y como se aprecia en el gráfico 4 (ver anexo 4: Valores de la frontera eficiente).

Gráfico 4. Frontera eficiente para estimación por Black-Litterman



5. COMPARACIÓN

Para la comparación de los resultados de ambos modelos se muestran a continuación los gráficos 5, 6 y 7, donde en el eje Y se expresa el 100% del portafolio y los activos que lo componen, y en el eje X el nivel de riesgo para dicha combinación. Los gráficos concluyen qué tan diversificados están los portafolios con un nivel de riesgo y qué participación tiene cada activo en la totalidad del portafolio.

Gráfico 5. Relación participación-riesgo en la estimación por Markowitz

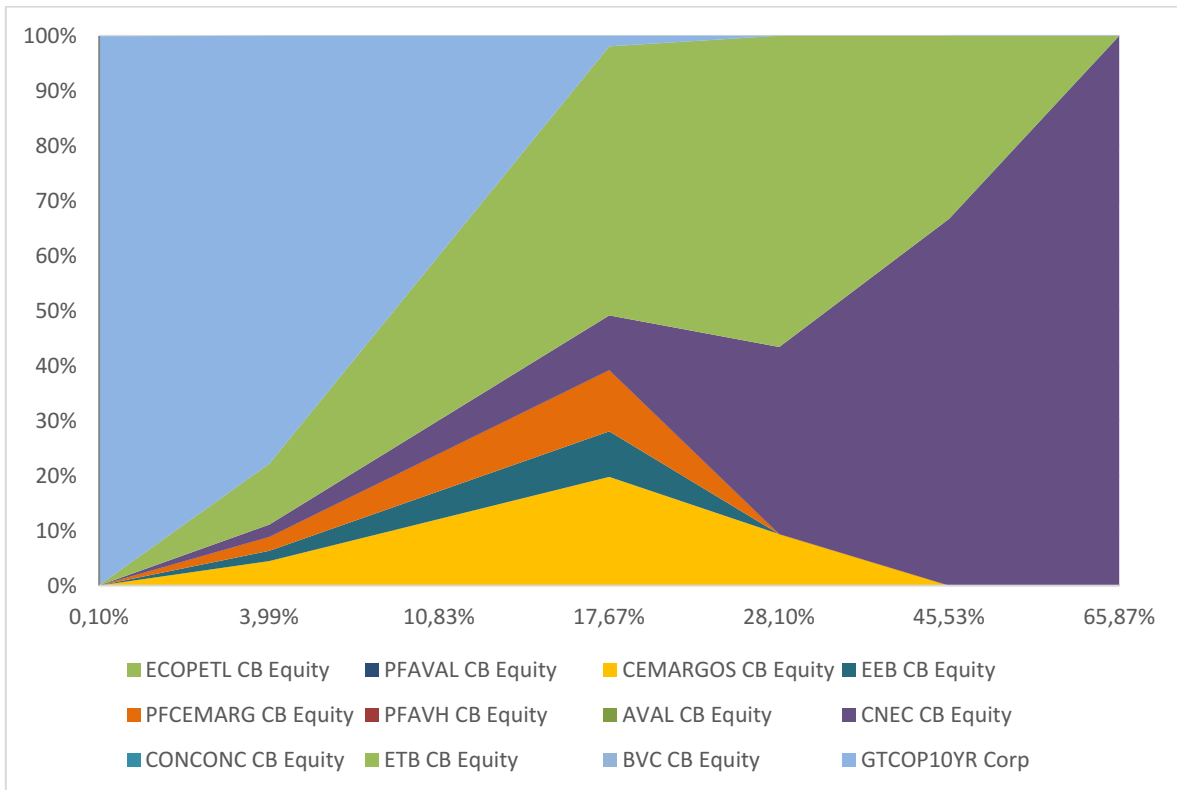


Gráfico 6. Relación participación-riesgo en la estimación por Black-Litterman RO

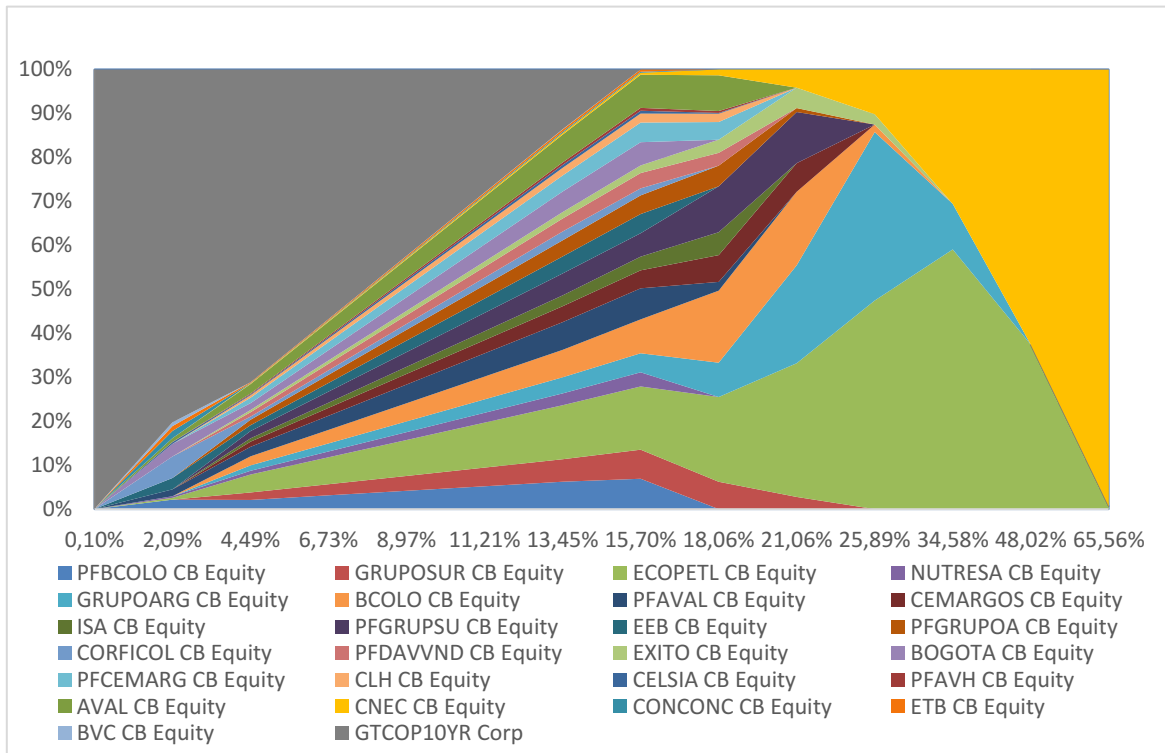
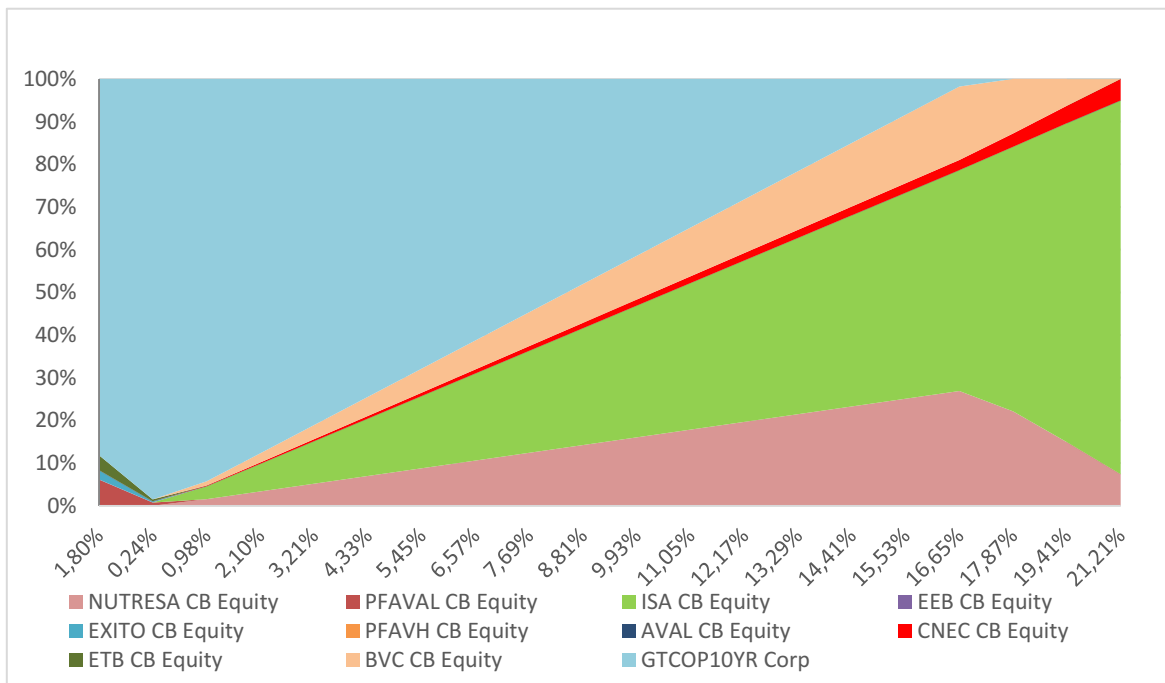


Gráfico 7. Relación participación-riesgo en la estimación por Black-Litterman



Existen muchas formas de obtener el portafolio óptimo (ratio de Sharpe, minimizar el riesgo, maximizar la rentabilidad, la función de utilidad del agente y la línea tangencial a partir de la tasa libre de riesgo, entre otras). El presente trabajo hace una comparación de las fronteras eficientes, ya que, por definición, cualquier portafolio que esté en la frontera eficiente es un potencial portafolio óptimo.

Lo que muestra esta comparación es el porcentaje de los activos que utilizan las dos metodologías para el cálculo de la frontera eficiente. Si comparamos la metodología Markowitz con la metodología Black-Litterman RO, se puede observar que la Markowitz considera muchos activos como ineficientes, debido a que en el período en que se tomaron los retornos no tuvieron un buen desempeño. Por el contrario, el enfoque Black-Litterman RO, al hacer el cálculo de los retornos utiliza una base estadística de probabilidad, y no el comportamiento histórico. Cabe aclarar que Black-Litterman RO es una versión anterior al modelo completo Black-Litterman, ya que no tiene *views*, y estas descartan algunos activos, por lo cual es de esperarse que Black-Litterman RO tenga la mayor diversificación. Aunque ambos portafolios, con niveles de riesgo muy bajos, utilizan un gran porcentaje de la participación en renta fija, al incrementar el riesgo se empieza a ver cómo el portafolio Black-Litterman RO incluye más activos.

Al incluir las *views*, o criterios de experto, en el modelo Black-Litterman, la estimación se ajusta a un número menor de activos que, según el modelo y la combinación con los criterios de los expertos, son los activos óptimos para la inversión. En resumidas cuentas, al incluir las *views*, la estimación tiene un criterio adicional para calcular el valor esperado de los activos. El modelo Black-Litterman con *views* hace un portafolio más viable y más ajustado a la realidad para un inversionista, debido a que logra que haya diversificación y un portafolio óptimo sin tener que invertir en más de 20 activos, como lo propone el Black-Litterman RO.

Con el fin de hacer un análisis más detallado, a continuación se hace una comparación por medio de tres métodos: ratio de Sharpe, fijando el nivel de riesgo y fijando el nivel de rentabilidad por medio de los dos métodos expuestos (Markowitz y Black-Litterman).

Para comparar por ratio de Sharpe, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{ratio de sharpe} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

donde R_p es la rentabilidad del portafolio; R_f , la tasa libre de riesgo previamente establecida con el valor de 5%; y σ_p , el riesgo del portafolio. Según lo estableció Sharpe (1963), este ratio es el portafolio óptimo, donde hay más rentabilidad por menos riesgo.

Para el segundo análisis, se establece un nivel de rentabilidad objetivo minimizando la varianza y cambiando las participaciones. Para este ejercicio, se fija una rentabilidad de 12%.

Para el tercer análisis se establece el nivel de riesgo objetivo maximizando la rentabilidad y cambiando las participaciones de los activos. Para este caso, se establece un riesgo objetivo de 15%.

A continuación, en las tablas 1 y 2 se presentan los tres portafolios óptimos obtenidos a través de los dos métodos: el Markowitz y el Black-Litterman. Cabe aclarar que los activos que tenían una participación de 0% en las estimaciones se eliminaron, para facilitar la visualización de la información. En las primeras dos filas de ambas tablas, se puede observar el retorno esperado y la desviación estándar, y de la fila tres en adelante, la participación de los activos que hacen óptimos los portafolios, tanto para la estimación por Markowitz (tabla 1) como por Black-Litterman (tabla 2).

Tabla 1. Estimación de portafolios óptimos por Markowitz

Markowitz			
	Ratio de Sharpe (21,5)	E (R) Fijo	(s) Fijo
Er	7,20%	12,00%	11,58%
s	0,10%	16,43%	15,00%
PFAVAL CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
CEMARGOS CB Equity	0,00%	28,27%	25,78%
EEB CB Equity	0,00%	13,70%	12,47%
PFGRUPOA CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
CORFICOL CB Equity	0,01%	0,00%	0,00%
BOGOTA CB Equity	0,01%	0,01%	0,01%
PFCEMARG CB Equity	0,00%	19,18%	17,60%
CNEC CB Equity	0,00%	12,96%	11,81%
ETB CB Equity	0,04%	0,03%	0,04%
GTCOP10YR Corp	99,93%	25,84%	32,28%

Tabla 2. Estimación de portafolios óptimos por Black-Litterman

Black-Litterman			
	Ratio de Sharpe (24,0)	E (R) Fijo	(s) Fijo
Er	7,5%	12,0%	36,5%
s	0,1%	2,4%	15,0%
GRUPOSUR CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
NUTRESA CB Equity	0,00%	3,77%	24,22%
PFAVAL CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
CEMARGOS CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
ISA CB Equity	0,00%	7,27%	46,69%
PFGRUPSU CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
CORFICOL CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
PFDAVVND CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
EXITO CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
AVAL CB Equity	0,00%	0,00%	0,00%
CNEC CB Equity	0,00%	0,33%	2,08%
ETB CB Equity	0,01%	0,01%	0,00%
BVC CB Equity	0,00%	2,41%	15,47%
GTCOP10YR Corp	99,98%	86,20%	11,53%

Como se puede observar en las anteriores tablas, a la hora de maximizar la razón de Sharpe, ambos modelos consideran una inversión casi única en el bono corporativo. Esto debido a que, por las características de los datos observados, la alta rentabilidad y el bajo riesgo del bono maximizan la razón de Sharpe hasta 21,5 en Markowitz, y 24,0 en Black-Litterman.

A la hora de mirar el portafolio con retorno esperado fijo la comparación cambia drásticamente, ya que Markowitz calcula un riesgo de 16%, mientras que Black-Litterman calcula uno de 2,4%. Esto debido a que el modelo Black-Litterman, para diversificar utiliza activos que Markowitz había previamente descartado por rentabilidades negativas, y que combinan mejor entre sí para tener un riesgo menor.

Finalmente, en el portafolio con riesgo de 15% fijo, Markowitz calcula una rentabilidad de 11,6%, mientras que Black-Litterman, de 36,5%. Black-Litterman tiene más opciones para diversificar, debido a que hay muchos activos que en Markowitz tenían rentabilidades negativas, y Black-Litterman los utiliza para diversificar y mitigar el riesgo. Debido a lo anterior, Black-Litterman puede ofrecer una rentabilidad de más del triple, con el mismo nivel de riesgo.

6. CONCLUSIONES

Para concluir, se puede afirmar que el modelo Black Litterman es un mejor estimador de un portafolio por las siguientes cuatro razones:

Primera: la estimación por Black-Litterman tiene un enfoque estadístico de predicción de los retornos, donde un activo que haya tenido un rendimiento deficiente en los últimos períodos puede tener retornos positivos, mientras que la metodología Markowitz lo descartaría.

Segundo: el modelo Black-Litterman, al incorporar las *views* al modelo, no solo tiene en cuenta retornos por estadística, sino que, adicionalmente, por análisis fundamental y análisis técnico de las acciones. Esto debido a que las calificadoras de donde se extraen los *views* utilizan ambas metodologías para dar su recomendación.

Tercero: el modelo Black-Litterman logra incorporar más variables del mercado que ayudan a ajustar al modelo a la realidad, como lo es la capitalización de mercado, la aversión al riesgo, la tasa libre de riesgo y el número de observaciones.

Cuarto: al incorporar las *views* al modelo Black-Litterman, el número de activos que hay que invertir, dado el nivel de riesgo, se reduce para hacer un portafolio más realista, eliminando los activos que se consideran ineficientes.

Adicionalmente, se puede concluir que la optimización por Black-Litterman puede tener un menor riesgo con mayor rentabilidad que la optimización por Markowitz, debido a que el modelo Black-Litterman, al no excluir activos que para Markowitz tenían rentabilidad negativa, tiene un abanico más amplio para disminuir el riesgo vía correlación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bade, A., Frahm, G., & Jaekel, U. (2009). A general approach to Bayesian portfolio optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70(2), 337-356.
- Bernal, C. (2013). *Black-Litterman vs. Markowitz: un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia* (tesis de Maestría en Economía). Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43. Disponible en <http://www.sef.hku.hk/tpg/econ6017/2011/black-litterman-1992.pdf>
- Franco-Arbeláez, L. C., Avendaño-Rúa, C. T., y Barbutín-Díaz, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, 26, 71-88.
- Jacobs, H., Müller, S., & Weber, M. (2014). How should individual investors diversify? An empirical evaluation of alternative asset allocation policies. *Journal of Financial Markets*, 19, 62-85.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Nikbakht, E. (2011). Black-Litterman's Model: Portfolio's Friend or Foe? *The Finance Professionals' Post*. Disponible en <http://post.nyssa.org/nyssa-news/2011/03/black-littermans-model-portfolios-friend-or-foe.html>

Ramírez, S. L., y Jaramillo, M. T. (2015). Aplicación del modelo Black-Litterman al mercado de renta variable colombiano. Universidad EAFIT. Disponible en http://www1.eafit.edu.co/asr/courses/research-practises-me/2015-2/students/proposal-reports/BL_proposal_Susana_Miguel.pdf

Sharpe, W. F. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9(2), 277-293.

Anexos

Anexo 1. Valores en porcentaje (%)

E(r)	s	PFCOLO CB Equity	GRUPOSUR CB Equity	ECOPETL CB Equity	NUTRESA CB Equity	GRUPOARG CB Equity	BCOLO CB Equity	PFAVAL CB Equity	CEMARGOS CB Equity	ISA CB Equity	PFGROUPSU CB Equity	EEB CB Equity	PFGROUPPOA CB Equity	CORFICOL CB Equity	PFDVAVND CB Equity	EXITO CB Equity	BOGOTA CB Equity	PFCEMARG CB Equity	CLH CB Equity	CELSIA CB Equity	PFAVH CB Equity	AVAL CB Equity	CNEC CB Equity	CONCONC CB Equity	ETB CB Equity	BVC CB Equity	GTCP10YR Corp
-29	31	0	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-27	27	0	0	81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0
-24	24	0	0	66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	0
-22	21	0	0	53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	5	0	29	0
-19	19	0	0	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0	15	0	31	0
-17	17	0	0	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	3	0	0	0	2	0	0	21	0	31	0
-14	15	0	0	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	0	0	0	2	0	0	21	0	28	6
-11	13	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0	0	0	2	0	0	18	0	25	17
-9	11	0	0	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	5	0	0	0	1	0	0	16	0	22	29
-6	10	0	0	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	4	0	0	0	1	0	0	13	0	18	40
-4	8	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	0	0	0	1	0	0	11	0	15	51
-1	6	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0	0	0	1	0	0	8	0	11	62
1	4	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	6	0	8	73
4	3	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	4	0	5	84
6	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	95
9	4	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	2	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	0	11	0	78
11	11	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	5	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	6	0	30	0	40
14	18	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	8	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	10	0	49	0	2
16	28	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	34	0	57	0	0
19	46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	67	0	33	0	0
21	66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
min																											
var																											

Anexo 2. Capitalización de mercado y criterios de experto

	MKT CAP	Views		MKT CAP	Views
PFBCOLO CB Equity	6,88%	1,58%	PFDVVND CB Equity	3,25%	5,39%
GRUPOSUR CB Equity	5,59%	8,88%	EXITO CB Equity	1,63%	8,25%
ECOPETL CB Equity	13,56%	5,67%	BOGOTA CB Equity	5,13%	-0,64%
NUTRESA CB Equity	2,99%	5,31%	PFCMARG CB Equity	4,02%	-4,04%
GRUPOARG CB Equity	4,05%	8,25%	CLH CB Equity	1,92%	8,95%
BCOLO CB Equity	6,88%	9,29%	CELSIA CB Equity	0,73%	11,39%
PFAVAL CB Equity	6,99%	-0,42%	PFAVH CB Equity	0,63%	10,39%
CEMARGOS CB Equity	4,02%	1,76%	AVAL CB Equity	6,99%	-5,64%
ISA CB Equity	2,73%	-3,84%	CNEC CB Equity	0,41%	28,74%
PFGROUPSU CB Equity	5,59%	9,13%	CONCONC CB Equity	0,32%	-7,00%
EEB CB Equity	4,29%	3,74%	ETB CB Equity	0,54%	15,38%
PFGROUPOA CB Equity	4,05%	7,30%	BVC CB Equity	0,09%	20,28%
CORFICOL CB Equity	2,15%	9,92%	GTCOP10YR Corp	4,56%	7,21%

Anexo 3. Valores en porcentaje (%)

E (R)	Var	PFBCOLO CB Equity	GRUPOSUR CB Equity	ECOPETL CB Equity	NUTRESA CB Equity	GRUPOARG CB Equity	BCOLO CB Equity	PFAVAL CB Equity	CEMARGOS CB Equity	ISA CB Equity	PFGRUPSU CB Equity	EEB CB Equity	PFGRUPOA CB Equity	CORFICOL CB Equity	PFDAVVND CB Equity	EXITO CB Equity	BOGOTA CB Equity	PFCEMARG CB Equity	CLH CB Equity	CELSIA CB Equity	PFAVH CB Equity	AVAL CB Equity	CNEC CB Equity	CONCONC CB Equity	ETB CB Equity	BVC CB Equity	GTCOP10YR Corp
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
6	2	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	3	0	5	0	0	3	0	0	0	0	1	0	2	1	1	83
7	4	2	2	4	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	0	0	2	0	0	0	0	71
8	7	3	3	6	1	2	3	3	2	1	3	2	2	1	1	1	2	2	1	0	0	3	0	0	0	0	57
9	9	4	3	8	2	2	4	4	2	2	3	3	2	1	2	1	3	2	1	0	0	4	0	0	0	0	42
10	11	5	4	10	2	3	5	5	3	2	4	3	3	2	2	1	4	3	1	1	0	5	0	0	0	0	28
11	13	6	5	12	3	4	6	6	4	2	5	4	4	2	3	1	5	4	2	1	1	6	0	0	1	0	14
12	16	7	7	14	3	4	8	7	4	3	5	4	4	2	3	2	5	4	2	1	1	8	0	0	1	0	0
13	18	0	6	19	0	8	16	2	6	5	10	0	5	0	3	3	0	4	2	0	0	8	1	0	0	0	0
14	21	0	3	30	0	22	17	0	7	0	12	0	1	0	0	5	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0
15	26	0	0	47	0	38	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0
16	35	0	0	59	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31	0	0	0	0
17	48	0	0	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	63	0	0	0	0
18	66	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99	0	0	0	0

Anexo 4. Valores en porcentaje (%)

E (R)	Var	PFBCOLO CB Equity	GRUPOSUR CB Equity	ECOPETL CB Equity	NUTRESA CB Equity	GRUPOARG CB Equity	BCOLO CB Equity	PFAVAL CB Equity	CEMARGOS CB Equity	ISA CB Equity	PFGRUPSU CB Equity	EEB CB Equity	PFGRUPOA CB Equity	CORFICOL CB Equity	PFDVVND CB Equity	EXITO CB Equity	BOGOTA CB Equity	PFCEMARG CB Equity	CLH CB Equity	CELSIA CB Equity	PFAVH CB Equity	AVAL CB Equity	CNEC CB Equity	CONCONC CB Equity	ETB CB Equity	BVC CB Equity	GTCOP10YR Corp
5	2	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	88
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99
9	1	0	0	0	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	94
12	2	0	0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	88
14	3	0	0	0	5	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	81
16	4	0	0	0	7	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4	74
18	5	0	0	0	9	0	0	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	6	68
20	7	0	0	0	11	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	7	61
22	8	0	0	0	12	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	8	55
25	9	0	0	0	14	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	9	48
27	10	0	0	0	16	0	0	0	0	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	10	41
29	11	0	0	0	18	0	0	0	0	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	11	35
31	12	0	0	0	20	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	13	28
33	13	0	0	0	21	0	0	0	0	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	14	22
35	14	0	0	0	23	0	0	0	0	45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	15	15
38	16	0	0	0	25	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	16	8
40	17	0	0	0	27	0	0	0	0	52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	17	2
42	18	0	0	0	22	0	0	0	0	62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	13	0
44	19	0	0	0	15	0	0	0	0	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	6	0
46	21	0	0	0	7	0	0	0	0	88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0